# 周波数の評価について

今野 滋

平成 28 年 10 月 24 日


## 概 要

低周波音・超低周波音の特徴を捉える方法として、フーリエ変換が有効である。この計算の特徴を示す。


## 1 記号と用語

「$A := B$」は、「B をもって A を定義する」の意味とする。

周期 $T$ とは、一定のタイミングで同じ値が繰り返される場合の、一回りの時間。

振動数 $f$ とは、同じ繰り返しが続く場合に、一秒間あたりに繰り返される回数。一秒をこの数で割ると、繰り返し一回あたりの時間、すなわち周期になる。

$$T = \frac{1}{f} \tag{1}$$

周波数とは、振動数の別名。

## 2 フーリエ展開

時刻 $t$ の関数 $F(t)$ が、値が無限大などに発散しないで周期 $T$ をもつとき、すなわち、任意の $t$ に対して $F(t+T) = F(t)$ となるとき、$F(t)$ は、$n$ を整数として、以下のように振動数 $f_n := \frac{n}{T}$ の振動の和として表わされる。これを「フーリエ展開」という。

$$n := 0, 1, 2, 3, ... \tag{2}$$

$$c_n, s_n \in \text{実数} \tag{3}$$

$$f_n := \frac{n}{T} \tag{4}$$

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(2\pi f_n t) + s_n \sin(2\pi f_n t) \tag{5}$$

各時刻 $t$ に対して $F(t)$ が値を持つように、各振動数 $f_n$ に対して、係数 $c_n$,$s_n$ はそれぞれ値を持つ。これを「$F(t)$ は振動数 $\mathrm{f}_n$ に対して振幅 $c_n$,$s_n$ を持つ」という。$j^2 = -1$ となる代数を用いて、$c_n - js_n$ を新たに複素振幅といい、その大きさ、$\sqrt{c_n^2 + s_n^2}$ を振幅の絶対値という。本稿では特に断りの無い限り、振幅の絶対値を単に振幅と呼ぶことにする。振動の物理的な現象や、振動の生体への影響などは、振動数 $f_n$ 毎に大きくその性質を変える場合が多いから、各振動数 $f_n$ に対する振幅を求めることが、その振動の影響を推し量る上で重要な要素となる。

## 3 係数を求める公式

たとえば、$F(t) = \sin(2\pi \frac{t}{T})$ だとすると、係数は、

$$s_1 = 1 \tag{6}$$

$$s_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3...) \tag{7}$$

$$c_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, ...) \tag{8}$$

である。そうなるように係数を求める公式を設定すると、以下のように三角関数との積の時間平均の 2 倍として書き下されることがわかる。

$$c(f) := \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \cos(2\pi f t) dt \tag{9}$$

$$s(f) := \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \sin(2\pi f t) dt \tag{10}$$

$$c_n = c(f_n) \tag{11}$$

$$s_n = s(f_n) \tag{12}$$

## 4　フーリエ変換

周期性を持たない関数に関しては、発散しないという条件のもと、フーリエ展開の周期に対して $T \to \infty$ の極限として考えることができる。そのとき、振動数 $f_n$ は連続量として捉えることができる。これをフーリエ変換という。この極限で、$\frac{1}{T} \to df$ , $\sum \to \int$ だから、係数 $c(f)$, $s(f)$ は微分の程度の測度を持つことになる。

## 5　観測との関係

測定している振動現象の主な振動数 $f_0$ の値を調べたい。測定対象は周期 $\frac{1}{f_0}$ の周期性を持つから、その整数倍の時間の観測を行うなら、フーリエ展開を適用することができる。しかしながら、$f_0$ の値は解析前には未知であるばかりか、複数の振動数が混在している場合もあり得る。それなら、観測を無限時間行ってフーリエ変換を行えば良いのだが、実際に無限時間測定することは不可能。しかたがないので、予測値としての $f_0$ を求める方法を考える。

一つの妥協案としては、観測時間を求めたい周期 $\frac{1}{f_0}$ よりも十分に大きく取り、測定値を、その観測時間 $T$ を周期とする周期関数であるものとして近似する。

$$T := \text{観測時間} \tag{13}$$

$$c(f) := \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\cos(2\pi ft)dt \tag{14}$$

$$s(f) := \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\sin(2\pi ft)dt \tag{15}$$

これはとくに $f = n/T$ の場合に限ればフーリエ展開 (9)(10) と同じであるが、そうでない場合は「フーリエ変換の積分区間を切り詰めた近似式」と解釈される。

なお、計算の便宜上、積分区間を $[\ -\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T\ ]$ としたが、積分上の時刻の原点をずらしても本質的には何も変わらない。

### 5.1　純音の場合

実際に振動数 $f_0$ の正弦波について、これらの係数 (14,15) を計算してみよう。

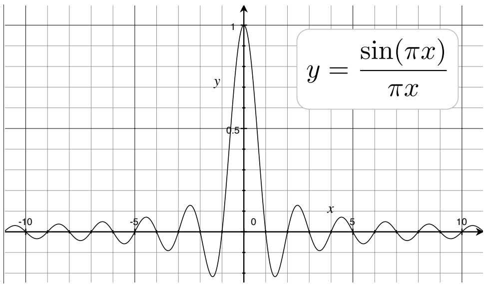


図 1: ベッセル関数

まず、ベッセル関数（図 1）を用いて以下を定義する。

$$j_+ := \frac{\sin(\pi(f+f_0)T)}{\pi(f+f_0)T} \quad (16)$$

$$j_- := \frac{\sin(\pi(f-f_0)T)}{\pi(f-f_0)T} \quad (17)$$

たとえばこれにフーリエ展開に倣ったサンプルとして $f = n/T$（$n$ は整数）を代入すると、

$$j_\pm = \mp(-1)^n \frac{\sin(f_0 T\pi)}{(n \pm f_0 T)\pi} \quad (18)$$

$$j_- = 1 \quad (where \quad n = f_0 T) \quad (19)$$

である。このとき例えば、$F(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ なら、

$$c(f) = 0 \quad (20)$$

$$s(f) = j_- - j_+ \quad (21)$$

$F(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ なら、

$$c(f) = j_- + j_+ \quad (22)$$

$$s(f) = 0 \quad (23)$$

さらに、$F(t) = sin(2\pi f_0 t + \psi)$ なら、三角関数の加法定理などを用いて、上記の結果より、

$$c(f)^2 + s(f)^2 = j_-^2 + j_+^2 - 2j_+ j_- \cos(2\psi) \quad (24)$$

が、得られる。
すなわち、振幅は（図 2）に示す三角形の辺の長さとして表わされる。

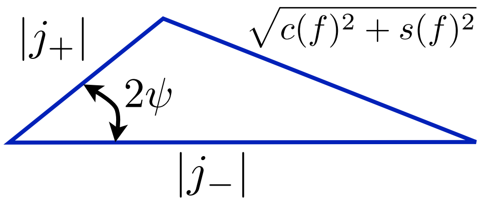


図 2: 振幅の絶対値

## 5.2　純音のフーリエ展開

前節において、もしも $f_0 T$ の値が整数ならば、$fT$ の値が整数になる $f$ において、$f = f_0$ で $j_- = 1$ となる以外の値は全て 0 になるから、フーリエ展開が正しく成り立っていることが確認される（図 3）。

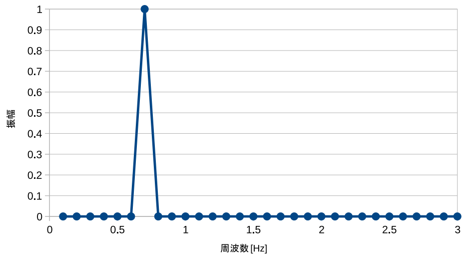


図 3: 正弦波 f=0.70Hz 時間 10s 展開

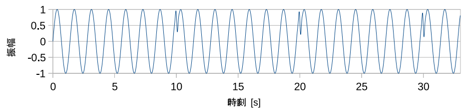


図 4: 正弦波 f=0.72Hz データ時間 10s 波形

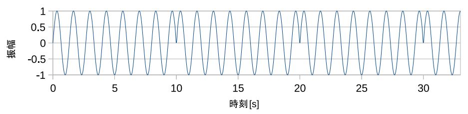


図 5: 正弦波 f=0.75Hz データ時間 10s 波形

一方、$f_0 T$ の値が整数ではない場合には、本来には無い周期 $T$ を人為的に入れたことになるために（図 4 , 5）、$f_0$ 以外の様々な周波数成分が 0 ではない値を持つ必要がある（図 6,7）。この解析の目的は、特徴的な振動数とその回りの音圧レベルを特定することだから、振動数の範囲を絞り込めたという意味では目的が達成された。しかしながら音圧レベルの評価には、近い周波数のピークからの干渉があることに注意を払う必要がある。

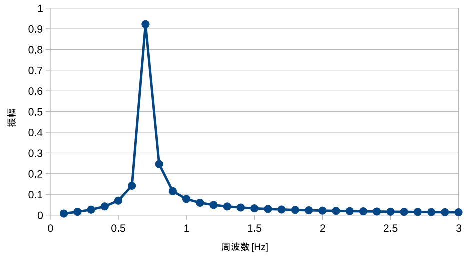


図 6: 正弦波 f=0.72Hz データ時間 10s 展開

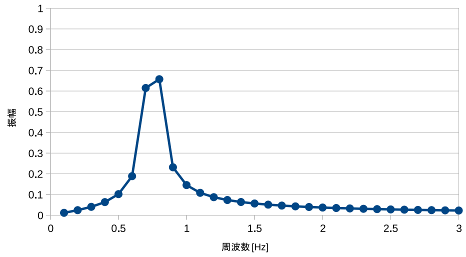


図 7: 正弦波 f=0.75Hz データ時間 10s 展開

## 5.3　純音のフーリエ変換

$T \to \infty$ の極限において、$j_+$ , $j_-$ はディラックの $\delta$ 関数を用いて、

$$j_+ \quad \to \quad 0 \tag{25}$$

$$j_- \quad \to \quad \delta(f - f_0)\, df \tag{26}$$

となるから、フーリエ変換も正しく成り立っていることが確認される。

## 5.4　純音の疑似フーリエ変換

観測時間 T が観測値の周期ではない場合、すなわち、$f_0T$ の値が整数ではないと見込まれる場合でも、$j_+$ の値が十分に小さければ、純音の振幅の絶対値はほぼ $j_-$ の絶対値と一致する。ゆえに、その最大値を与える振動数として $f_0$ の値を近似的に求めることができる。

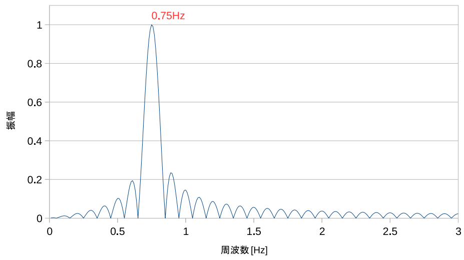


図 8: 正弦波 f=0.75Hz 測定時間 10s 疑似 Fourie 変換

ただし、周波数と振幅の絶対値の間のグラフにおいてメインのピークの幅はおよそ $2/T$ 程度。その両側およそ $3/(2T)$ ほど離れたところにメインのピークの大きさの 0.2 倍程度の大きさのニセのピークが現れることに注意する必要がある。

## 5.5　分解能

大きさが同程度の 2 つの純音を重ね合わせたとき、振動数がどの程度離れていれば区別できるのかを考えてみる。グラフ横軸を振動数のスケールにした場合の、純音によるピークの幅は、ベッセル関数の形により、$2/T$ 程度と考えられる。絶対値・位相・振動数が共に近接する 2 つの純音が重なり合っていた場合、振動数が $1.4/T$ 程度よりも近いピークを区別することは困難となる。故に振動数の分解能は $2/T$ 程度と考えられる（図 9,10）。象徴的には以下のように振動数と測定時刻との不確定性関係として表わされる。

$$(\text{振動数分解能}) \times (\text{測定時間}) \gtrsim 2 \tag{27}$$

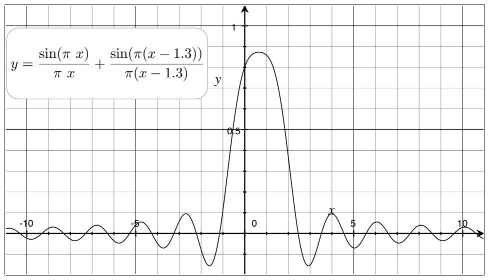


図 9: 振動数が $\frac{1.3}{T}$ だけ離れた 2 つの純音

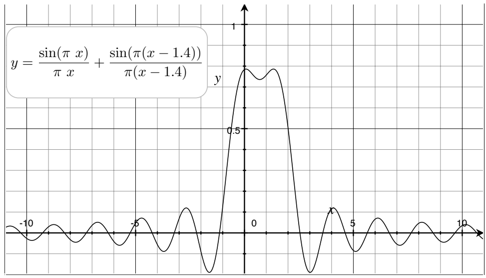


図 10: 振動数が $\frac{1.4}{T}$ だけ離れた 2 つの純音

一方、$j_+$ はピーク高さを評価する上で誤差と考えられる。つまり、ピーク高さの精度の一要因としては、$1/(\pi(f+f_0)T)$ 程度。すなわち、振動数の低い超低周波音領域で、この近似の処方箋の精度が落ちることになる。着目している最低の振動数を $f_{min}$ とすると、低周波音領域での精度は、$1/(2\pi f_{min}T)$ であると評価される。例えば、最低振動数を 0.1Hz、ピーク高さの測定精度をおよそ 10%と設定するならば、少なくとも 16 秒以上の測定時間が必要となる。さらに、高さの精度を 1%にまで高めるとするならば、160 秒程度の測定時間が必要であることがわかる。