p39 - 40

Mass fomula for the string

質量は、（符号に注意　$g_{\mu\nu} = (- + ..+)$，　$p^2 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$，　$ds^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ）

$$M^2 \equiv -p^2$$

で定義する。一方、Virasaoro generetor は、classical には、世界面上の座標変換不変性により、

$$L_0 = 0, \quad \tilde{L}_0 = 0$$

だから、

● 開弦の場合 2.42, 2.62, 2.76 より（！今はclassical ⇒ α はただの複素数）

$$0 = L_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n + \frac{1}{2} \alpha_0{}^2$$

$$\frac{1}{2} \alpha_0{}^2 = \frac{1}{2} (l_s p)^2 = \alpha' p^2 \quad \because (2.42, 2nd\ line\ of\ 2.63)$$

$$\therefore M^2 \equiv -p^2 == \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n$$

● 閉弦の場合 2.40-42, 2.46, 2.74 より

$$0 = L_0 + \tilde{L}_0 = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \tilde{\alpha}_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \tilde{\alpha}_n + \frac{1}{2} \left(\alpha_0{}^2 + \tilde{\alpha}_0{}^2 \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\alpha_0{}^2 + \tilde{\alpha}_0{}^2 \right) = \alpha_0{}^2 = \left(\frac{1}{2} l_s p \right)^2 = \frac{\alpha'}{2} p^2 \quad \because (2.46)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \tilde{\alpha}_n + \frac{\alpha'}{2} p^2 = 0$$

$$\therefore M^2 \equiv -p^2 = \frac{2}{\alpha'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \tilde{\alpha}_n \right)$$

以上 ☺