p40 2.85 ワイル変換と、ゲージ変換の複合 (?)

計量の Lie 微分

Gauge 変換 $x = x' + \xi(x')$ により、

$$d\tilde{s}^2(x') \equiv ds^2(x)$$
$$= g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$
$$= g_{\mu\nu}(x'+\xi(x'))d(x'+\xi(x'))^\mu d(x'+\xi(x'))^\nu$$
$$= g_{\mu\nu}(x')dx'^\mu dx'^\nu + \frac{\partial g_{\mu\nu}(x')}{\partial x'^\rho}\xi^\rho(x')dx'^\mu dx'^\nu + 2g_{\mu\nu}(x')dx'^\mu \frac{\partial \xi^\nu(x')}{\partial x'^\rho}dx'^\rho$$
$$= \left(g_{\mu\nu}(x') + \frac{\partial g_{\mu\nu}(x')}{\partial x'^\rho}\xi^\rho(x') + +2g_{\mu\rho}(x')\frac{\partial \xi^\rho(x')}{\partial x'^\nu} \right) dx'^\mu dx'^\nu$$

よって、計量のLie微分は

$$\delta^L ds^2(x) = d\tilde{s}^2(x) - ds^2(x)$$
$$\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x'^\rho}\xi^\rho(x) + 2g_{\mu\rho}(x)\frac{\partial \xi^\rho(x)}{\partial x'^\nu} \right) dx^\mu dx^\nu$$

ゆえに、成分で表示するなら、以下のようになる。

$$\delta^L g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\rho}\xi^\rho(x) + g_{\mu\rho}(x)\frac{\partial \xi^\rho(x)}{\partial x^\nu} + g_{\nu\rho}(x)\frac{\partial \xi^\rho(x)}{\partial x^\mu}$$

この値がゼロになれば、ξ方向に時空は対称。（⇒ Killnig vector）

Weyl変換とLieドラッグ

gauge $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$を、世界面上でグローバルに選択できたのは、Weyl 変換不変性を利用して世界面の曲率をゼロにすることができたから。まだ、Weyl 変換不変性に対応した拘束条件が残っているに違いない。conformal factor は場所毎に異なって良いから、世界面上をベクトルξ向きに微少な移動をした際に、conformal factorのズレΛが見いだされるはず。ξ方向への計量のLieドラッグが、Weyl変換になっていた場合、

$$e^\Lambda ds^2 = ds^2(x) + \delta^L ds^2(x)$$

より、

$$\Lambda g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\rho}\xi^\rho(x) + g_{\mu\rho}(x)\frac{\partial \xi^\rho(x)}{\partial x^\nu} + g_{\nu\rho}(x)\frac{\partial \xi^\rho(x)}{\partial x^\mu}$$

が成り立つはず。

それで、？

つまり(2.85)式

$$\partial^\alpha \xi^\beta + \partial^\beta \xi^\alpha = \Lambda \eta^{\alpha\beta}$$

が、成り立つ。非対角成分とトレースがゼロだから、

$\partial^0\xi^1 + \partial^1\xi^0 = \partial^0\xi^0 + \partial^1\xi^1 = 0$　並び替えて、$\left(\partial^0 + \partial^1\right)\left(\xi^0 + \xi^1\right) = \left(\partial^0 - \partial^1\right)\left(\xi^0 - \xi^1\right) = 0$

ここで、$\partial^0 = -\partial_0, \partial^1 = \partial_1$ だから、 $\xi^0 + \xi^1$ は σ^+ の関数。 $\xi^0 - \xi^1$ は σ^- の関数。