Lie 微分

微少な座標変換をして、同じ座標値同士での場の量の差を取る。
座標値が同じでも、微少にズレたイベント(space-time)間での差をとるのだから、微分。

定義

座標の無限小変換：同じイベント(space-time)に対して微少に異なる座標値を割り振る変換

$$x^{\mu} \to x'^{\mu}$$

に対して、同一のイベントでの場の量 φ とその共役運動量 π が以下の様に変換されるとする

$$\varphi_{\alpha}(x) \to \varphi'_{\alpha}(x')$$
$$\pi_{\alpha}(x) \to \pi'_{\alpha}(x')$$

このとき、Lie 微分を以下のように定義する。（微少量の２次以下の項は無視）

$$\delta^{L}\varphi_{\alpha}(x) := \varphi'_{\alpha}(x') - \varphi_{\alpha}(x')$$
$$\delta^{L}\pi_{\alpha}(x) := \pi'_{\alpha}(x') - \pi_{\alpha}(x')$$

※ 座標変換に対して値を変えないスカラー量の場合は、

$$\delta^{L}\varphi(x) \;=\; \varphi'(x') - \varphi(x') \;=\; \varphi(x) - \varphi(x') \;=\; (\partial_{\mu}\varphi)(\;-(x'-x)^{\mu}\;)$$

となる。座標変換が値を増す変換である場合は、同じ座標値のイベントは新しい座標では座標値が減る方向に後退するから、(x'-x) は、微分でよく扱う dx とは符号が逆となることに注意。

計算

微少な差を δ を用いて、同一イベント上での座標変換に伴う値の差を以下のように表現する

$$\delta x := x' - x$$
$$\delta\varphi_{\alpha}(x) := \varphi'_{\alpha}(x') - \varphi_{\alpha}(x)$$
$$\delta\pi_{\alpha}(x) := \pi'_{\alpha}(x') - \pi_{\alpha}(x)$$

すると、Lie 微分は

$$\delta^{L}\varphi_{\alpha}(x) = \delta\varphi_{\alpha}(x) - \delta x^{\mu}\partial_{\mu}\varphi_{\alpha}(x)$$
$$\delta^{L}\pi_{\alpha}(x) = \delta\pi_{\alpha}(x) - \delta x^{\mu}\partial_{\mu}\pi_{\alpha}(x)$$

と、表現される。（符号に注意：$-\delta x^{\mu}$ が通常の微分の dx^{μ} に相当）

具体例

Φ が共変ベクトルの場合、各イベントで ξ だけずらす変換

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - \xi^{\mu}(x)$$

に対して、

$$A'_{\mu}(x') \;\equiv\; A_{\nu}(x)\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \;=\; A_{\nu}(x)(g^{\nu}_{\mu} + \xi^{\nu}{}_{,\mu}) \;=\; A_{\mu}(x) + A_{\nu}(x)\xi^{\nu}{}_{,\mu}(x)$$

だから、

$$\delta^{L}A_{\mu}(x) \;=\; A_{\nu}(x)\xi^{\nu}{}_{,\mu}(x) + \xi^{\nu}\partial_{\nu}A_{\mu}(x)$$

となる。同様に、tensor の場合は、

$$\delta^{L}T_{\mu\nu}(x) \;=\; T_{\rho\nu}(x)\xi^{\rho}{}_{,\mu}(x) + T_{\mu\rho}(x)\xi^{\rho}{}_{,\nu}(x) + \xi^{\rho}\partial_{\rho}T_{\mu\nu}(x)$$

さらに、共変ベクトルと反変ベクトルの積がスカラーであることから、反変ベクトルの Lie 微分は

$$\delta^{L}V^{\mu}(x) \;=\; -V^{\nu}(x)\xi^{\mu}{}_{,\nu}(x) + \xi^{\nu}\partial_{\nu}V^{\mu}(x)$$

参考文献

高橋 康　場の解析力学入門§3.5